

PAPER – ST- 401
MATHEMATICAL STATISTICS -II

Duration : 2 Hours

Marks: 70

INSTRUCTIONS: 1) Attempt all 5 compulsory questions in this question paper.

2) Use of Scientific calculator is allowed.

3) Statistical Tables and graph paper will be provided on request.

- Q1 (a) Define a Bernoulli probability distribution. Find its MGF, mean and standard deviation. 9
- (b) The life span (in years) for a particular kind of water heater is normally distributed with mean equal to 7.5 years and s.d. of 1.4 years. If the heater is guaranteed against breakdown for five years, what percentage of the heaters sold need to be replaced by the company under the guarantee? 5

OR

- Q1 (a) Find the Moment Generating Function and Cumulant Generating Function of Binomial probability distribution. Hence find its $\sqrt{\beta_1}$ and β_2 . 10
- (b) The average number of calls arriving at the PBX of a office in a minute is 1.5. Find the probability that – 4
- 1) At the most 2 calls come in a particular one minute interval of time.
 - 2) Exactly 5 calls come in a particular three minutes interval of time.

- Q2 a) Stating the necessary conditions, prove that a Binomial probability distribution tends to a Poisson probability distribution. 7
- b) Answer the following: 7
- i) A r.v. X has a Binomial probability distribution with mean 6 and variance 3.6. Find $P[X=4]$.
 - ii) Obtain the MGF of a Poisson probability distribution.

OR

- Q2 a) Define a generalized Gamma probability distribution with parameter (α, β) . Find its MGF, CGF, $\sqrt{\beta_1}$ and β_2 . 10

- b) Let X have an exponential probability distribution with a mean of $\theta = 20$. Find, 4
- 1) CDF of X ,
 - 2) $P[X < 18]$, and
 - 3) $P\left[X > 23/X > 20\right]$.

- Q3 a) If $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, show that [in usual notations], 9

$$\mu_{2n} = (1) (3) (5) \dots (2n - 1) \sigma^{2n}$$

Hence find its $\sqrt{\beta_1}$ and β_2 .

- b) Given that MGF of a r.v. X as 5

$$M_X(t) = e^{75t + 18t^2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

Find, -

- i) $P[X > 80]$,
- ii) $P[69 < X < 81]$,
- iii) Real no. r such that $p[X > r] = 0.10$

OR

- Q3 a) State the applications of (1) Poisson probability distribution, 6

- (2) exponential probability distribution
- (3) Gamma probability distribution ,

- b) Attempt the following: 8

- i) Show that the sum of independent exponential random variables with identical mean follows Gamma probability distribution.
- ii) The number of planes arriving per day at a small private airport is a random variable having a Poisson distribution with $\lambda = 28.8$. What is the probability that the time between two such arrivals of plane is at least 1 hour?

- Q4 a) Explain the following terms: 6

- i) Linear correlation
- ii) Linear Regression
- iii) regression coefficient of Y on X

b) Answer the following:

8

- i) Show that $-1 \leq r \leq 1$. (In usual notations)
- ii) The computations based on an observed random sample on two associated variables X and Y revealed

	X	Y
Mean	24	140
s.d.	4	10
Coefficient of correlation = $r = 0.6$		

Find the expected value of Y for X = 16 and find the expected value of X for Y = 150.

OR

Q4 a) Define exponential probability distribution, find its mean and std. deviation. 6

b) Answer the following:

8

- i) Show that exponential distribution lacks memory.
- ii) Show that regression coefficients are independent of change of origin but they are dependent on the change of scale.

Q5 a) Based on a bi-variate random sample of size n, (X_i, Y_i) , $i = 1, 2, 3, \dots, n$, and using the method of least squares, prove that [in usual notations] 10

$$b_{yx} = \frac{COV(X,Y)}{V(X)} \quad \text{and} \quad a = \bar{Y} - b_{yx} \bar{X}$$

b) If X and Y are independent variables with means 5 and 10 and s.d. 2 and 3 respectively obtain the coefficient of correlation between $3X + 4Y$ and $3X - Y$. 4

OR

Q5 a) Define sample coefficient of correlation r and show that it is independent of change of origin and scale. 7

b) If two lines of regression are given by 7

$$X + 2Y - 5 = 0 \quad \text{and}$$

$$2X + 3Y - 8 = 0$$

Find (1) Means of X and Y,

(2) Coefficient of correlation, and

(3) The ratio $\frac{V(Y)}{V(X)}$.

Gujarati version

સૂચના: (૧) આ પ્રશ્નપત્ર ના બધાજ પાંચેય પ્રશ્નો ના ઉત્તર લખો.

(૨) વિનંતી કરવાથી આલેખપત્રો અને આંકડાશાસ્ત્રીય કોષ્ટકો ઉપલબ્ધ થશે.

(૩) સાઈ-ટીફીક કેલ્ક્યુલેટર નો ઉપયોગ કરવાની છૂટ છે

- પ્ર ૧ અ) બર્નોલી સંભાવના વિતરણની વ્યાખ્યા આપો. તેના પ્ર. સ. વિ, મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો. 9
- બ) ચોક્કસ પ્રકારના પાણીના હીટરનું આયુષ્ય (વર્ષમાં) મધ્યક 7.5 અને પ્રમાણિત વિચલન 1.4 સાથે 5 પ્રમાણ્ય રીતે વિતરિત છે. જો આ હીટર કાર્ય કરતું બંધ થાય તેની સામે પાંચ વર્ષની ગેરંટી આપવામાં આવે તો ગેરંટી હેઠળ કંપની દ્વારા વેચાયેલા હીટર્સ પૈકી કેટલા હીટર્સને બદલવા પડી શકે? અથવા
- પ્ર ૧ અ) દ્વિપદી સંભાવના વિતરણ ના પ્રઘાત સર્જક વિધેય અને યોગઘાત સર્જક વિધેય શોધો. તે પરથી તેના $\sqrt{\beta_1}$ 10 અને β_2 શોધો.
- બ) એક ઓફીસ ના PBX પર એક મિનિટમાં આવતા કોલ ની સરેરાશ સંખ્યા 1.5 છે, તો નીચેની 4 ઘટનાઓની સંભાવના શોધો.
- (૧) કોઈ ચોક્કસ એક મિનિટના સમય ગાળામાં વધુ માં વધુ 2 કોલ્સ આવે.
- (૨) કોઈ ચોક્કસ ત્રણ મિનિટના સમયગાળામાં બરાબર 5 કોલ્સ આવે.
- પ્ર ૨ અ) જરૂરી શર્તોનો નિર્દેશ કરીને સાબિત કરો કે, દ્વિપદી સંભાવના વિતરણ, પોઇસાં સંભાવના વિતરણને 7 અનુલક્ષે છે.
- બ) નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તર લખો: 7
- (૧) એક યદ્યચ્છ ચલ X , મધ્યક 6 અને વિચરણ 3.6 વાળું દ્વિપદી વિતરણ ધરાવે છે, $P[X=4]$ શોધો.
- (૨) પોઇસાં સંભાવના વિતરણનું પ્ર. સ. વિ. મેળવો. અથવા
- પ્ર ૨ અ) પ્રચલો (α, β) ધરાવતા વ્યાપક ગામા સંભાવના વિતરણની વ્યાખ્યા આપો. તેના પ્રઘાત સર્જક વિધેય, 10 યોગઘાત સર્જક વિધેય, $\sqrt{\beta_1}$, અને β_2 શોધો.
- બ) ધારોકે યદ્યચ્છ ચલ X એ મધ્યક 20 સાથેનું ઘાતાંકીય વિતરણ ધરાવે છે 4
- (૧) X નું સંચયી વિતરણ વિધેય
- (૨) $P[X < 18]$ અને
- (૩) $P\left[X > 23/X > 20\right]$ શોધો.
- પ્ર ૩ અ) જો $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ હોય તો દર્શાવો કે (સામાન્ય સંકેતોમાં) 9
- $\mu_{2n} = (1) (3) (5) \dots (2n - 1) \sigma^{2n}$
- તે પરથી તેના $\sqrt{\beta_1}$ અને β_2 શોધો.

બ) એક યદ્યચ્છ ચલ X નું પ્રઘાત સર્જક વિધેય

5

$$M_X(t) = e^{75t+18t^2}, t \in R,$$

આપેલ છે,

(૧) $P [X > 80],$

(૨) $P [69 < X < 81],$

(૩) વાસ્તવિક સંખ્યા r કે જેથી $p[X > r] = 0.10$ શોધો.

અથવા

પ્ર ૩ અ) (૧) પોઇસાં (૨) ઘાતાંકીય અને (૩) ગામા સંભાવના વિતરણોના ઉપયોગો લખો. 6

બ) નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તર લખો: 8

(૧) દર્શાવો કે સમાન મધ્યક ધરાવતા નિરપેક્ષ ઘાતાંકીય યદ્યચ્છ ચલોનો સરવાળો ગામા સંભાવના વિતરણને અનુસરે છે.

(૨) એક નાના ખાનગી એરપોર્ટ પર દૈનિક ઉતરતા વિમાનો ની સંખ્યા એ $\lambda=28.8$ સાથે પોઇસાં વિતરણ ધરાવતો યદ્યચ્છ ચલ છે. બે વિમાનોના આગમન વચ્ચેનો સમય ઓછામાં ઓછો એક કલાક હોયે તે ઘટના ની સંભાવના કેટલી થશે?

પ્ર ૪ અ) નીચેના પદો સમજાવો: 6

(૧) સુરેખ સહ સંબંધ (૨) સુરેખ નિયત સંબંધ

(૩) Y નો X પરનો નિયત સંબંધાંક

બ) નીચે ના પ્રશ્નોના ઉત્તર લખો: 8

(૧) દર્શાવો કે : $-1 \leq r \leq 1$ (સામાન્ય સંકેતોમાં)

(૨) બે સહસંબંધિત ચલો પરનો એક નિરીક્ષીત યદ્યચ્છ નિદર્શ પર આધારિત ગણતરીઓ પર થી નીચેના પરિણામો મળે છે:

	X	Y
મધ્યક	24	140
પ્રમાણિત વિચલન	4	10
	સહસંબંધાંક = $r=0.6$	

$X = 16$ માટે Y નું અપેક્ષિત મૂલ્ય અને $Y=150$ માટે X નું અપેક્ષિત મૂલ્ય શોધો.

અથવા

પ્ર ૪ અ) ઘાતાંકીય સંભાવના વિતરણ ની વ્યાખ્યા આપો, તેના મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો. 6

બ) નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તર લખો: 8

(૧) દર્શાવો કે ઘાતાંકીય સંભાવના વિતરણ યાદશક્તિવિહિન છે.

(૨) દર્શાવો કે નિયત સંબંધાંકો કેન્દ્ર પરીવર્તન થી સ્વતંત્ર છે પરન્તુ સ્કેલ પરિવર્તન ઉપર પરતંત્ર છે.

પ્ર ૫ અ) n કદના એક દ્વિચલિય યદ્યચ્છ નિદર્શ $(X_i, Y_i), i = 1, 2, 3, \dots, n,$ પર આધારિત અને ન્યૂનતમ વર્ગોની પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરીને સાબિત કરો કે (સામાન્ય સંકેતોમાં) 10

$$b_{yx} = \frac{COV(X,Y)}{V(X)}, \quad a = \bar{Y} - b_{yx} \bar{X}$$

બ) જો X અને Y અનુક્રમે મધ્યકો 5 અને 10 તેમજ પ્રમાણિત વિચલન 2 અને 3 ધરાવતા નિરપેક્ષ ચલો હોય તો $3X + 4Y$ અને $3X - Y$ વચ્ચે નો સહસંબંધાંક શોધો. 4

અથવા

પ્ર ૫ અ) નિદર્શના સહસંબંધાંક r ની વ્યાખ્યા આપો અને દર્શાવો કે તે કેન્દ્ર અને સ્કેલ ના પરિવર્તનથી સ્વતંત્ર છે. 7

બ) બે નિયતસંબંધ રેખાઓ નીચે મુજબ છે: 7

$$X + 2Y - 5 = 0, \text{ અને}$$

$$2X + 3Y - 8 = 0$$

(૧) X ને Y ના મધ્યકો

(૨) સહ સંબંધાંક

(૩) ગુણોત્તર $\frac{V(Y)}{V(X)}$ શોધો.